

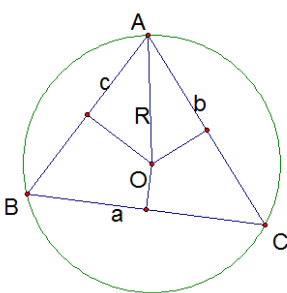
# 「海上定位」教案設計

## 壹、教案設計

教學主題	海上定位	適用年級	高二
適用科目	高中數學	使用節數	2 節
設計者	蔡鳳賢 老師	所屬學校	國花蓮女子高級中學
設計理念	<p>台灣四面環海，漁業資源豐富，海岸線上更是沙、岩岸交替更迭，生態變化豐富；因此發展出許多近岸活動，例如磯釣、船釣、賞鯨、浮潛、衝浪等各式各樣的活動。</p> <p>在這些活動過程中，人們藉著材料科技、數位化電子科技，逐步向海洋深處發展，人們藉著知識與工具逐步征服海洋，並取得許多豐碩的成果，例如東港的黑鮪魚季、海上鑽油平台等；但是，我們想問一個問題，拋開這些高科技工具，當我們面對海洋時，是否就如同手無縛雞之力的嬰孩，等待大自然無情的宰割呢？</p> <p>所以，本篇教案主要是教導學生如何利用手邊簡易的工具，當觀測者位於海上時，利用岸際三個參考點，可以得到目前所在位置及距岸最短距離，其設計理念如下表：</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD     A[海上定位] --- B[室內課程 (說明理論)]     A --- C[室外課程(一) (講解操作過程)]     A --- D[室外課程(二) (學生實際測距)]     B --- E[三角函數值表]     B --- F[正弦定理]     B --- G[餘弦定理]     B --- H[廣義三角函數]     C --- I[講解學習單]     C --- J[分組]     D --- K[分組實際測距]     D --- L[驗算測量結果]     D --- M[實際測量距離]         </pre> </div>		
建構教學目標	能力指標		教學目標
	學習領域 能力指標	海洋教育 能力指標	(由「設計理念」結合 「能力指標」而形成)

	<p><b>三角函數值表</b></p> <p>1-1 三角函數值表</p> <p>1-2 內插法</p> <p><b>正弦定理</b></p> <p>2-1 三角形的外接圓</p> <p>2-2 正弦定理與三角形的邊角關係</p> <p><b>餘弦定理</b></p> <p>3-1 餘弦定理</p> <p>3-2 餘弦定理的應用</p> <p>廣義三角函數</p> <p>4-1 廣義三角函數的定義</p> <p>4-2 廣義正弦函數與角度變換</p> <p><b>實際測量</b></p> <p>5-1 選擇相距較近的三個目標物</p> <p>5-2 選擇相距較遠的三個目標物</p> <p>5-3 利用正弦定理與餘弦定理定位海上目標物與距離</p> <p>5-4 實際測距結果與誤差</p>	<p>4-5-4 瞭解各種海洋探勘方法，如測量海水深度、地形結構、地質</p>	<p><b>認知方面</b></p> <p>1-1-1 瞭解三角函數值表及對應三角函數值 (1-1)</p> <p>1-2-1 瞭解內插法的定義 (1-1、1-2)</p> <p>2-1-1 瞭解三角形的外接圓 (2-1)</p> <p>2-2-1 瞭解正弦定理 (2-2)</p> <p>3-1-1 瞭解餘弦定理 (3-1)</p> <p>4-1-1 瞭解三角函數的定義 (4-1)</p> <p>4-2-1 瞭解正弦函數的定義 (4-2)</p> <p><b>情意方面</b></p> <p>5-1-3 樂於參與海洋測量活動估 (5-1、5-2、5-3、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p><b>技能方面</b></p> <p>1-1-2 能應用角度變換及三角函數值表查出大於 <math>90^\circ</math> 度之正弦函數值 (1-1、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>1-2-2 能應用內插法估計未知的三角函數的近似值 (1-2、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>2-2-2 能應用正弦定理計算三角形各邊邊長 (2-2、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>3-2-1 能在已知三角形中找出餘弦定理使用條件</p>
--	---	---	---

			<p>(3-2、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>3-2-2 能應用餘弦定理計算三角形的邊角關係 (3-2、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>4-1-2 能將角度放在直角坐標中分析 (4-1、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>5-1-1 能應用由岸際三個目標物(小於 30 公尺)估算角度 (5-1、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>5-2-1 能應用由岸際三個目標物(大於 60 公尺)估算角度 (5-2、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>5-3-1 能應用正弦定理、餘弦定理及測量角度計算觀測站與海上目標物之距離 (5-3、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>5-3-2 能比較相距較近目標物與相距較遠之間的誤差 (5-3、海洋教育指標 4-5-4)</p> <p>5-4-1 能比較計算結果與實際距離之誤差 (5-4、海洋教育指標 4-5-4)</p>
學生能力分析	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生主要來自花蓮市及附近鄉鎮(如新城鄉、吉安鄉、壽豐鄉)，在過去的生活經驗中，大部分都曾經參與過海上活動，例如賞鯨、船釣、海濱戲水，甚至部分學生參加過最近新興的海上活動—海上泛舟，對於海上測距必定存在疑惑。</li> <li>2. 學生多以第一志願進入花蓮女中，國中在校成績優良，歸納、表達判斷能力佳。</li> <li>3. 數學理論屬於幾何圖形及其性質，大部分內容具體實際，少部分抽象思</li> </ol>		

	考，學生的足以學習。			
教材來源	1. 高中數學課程綱要(99)第三冊 1-3 正弦定理、餘弦定理及 1-5 三角測量 (龍騰版高中數學第三冊) 2. 自編學習單			
教學準備	1. 教室資源：黑板、粉筆、投影布幕、投影機、電腦 2. 室外課資源：100m 皮尺、手錶及分度規(各組一份) 3. 室外課場地：100m × 50m 場地一式(可用水上場地)			
對應教學目標	教學活動	時間	教學資源	教學評量
1-1-1 1-2-1 2-1-1 2-2-1 3-1-1 4-1-1 4-2-1	<p>一、引起動機</p> <p>1. 小遊戲：觀看相片，請同學估計相片中的獨木舟距岸大約幾公尺？並請同學寫下估計距離，然後請各組比較答案。</p> <p>2. 提問：如果你在海上，你如何告訴岸際觀測者你的方位及距離。</p> <p>二、實際授課</p> <p>1. 介紹三角函數值表： (1)講授三角函數值表的查詢方式。 (2)講授使用內插法計算三角函數值。</p> <p>2. 正弦定理： (1)介紹利用中垂線尋找三角形的外接圓。</p>  <p>(2)由三角形面積推導正弦定理的第一部份。</p> $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ <p>(3)分別討論銳角、直角及鈍角所對應的</p> $\frac{a}{\sin A} = 2R (R \text{ 為外接圓半徑})$ <p>(4)提供例題說明，並利用數學軟體驗證。</p> <p>(5)提供例題請學生練習，熟悉三角函數值表</p>	5 0 分 鐘	課本 簡報 電腦 投影機	口頭評量 紙筆測驗

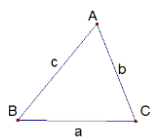
及正弦定理。

3. 餘弦定理：

(1) 介紹餘弦定理的一般型式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{或} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



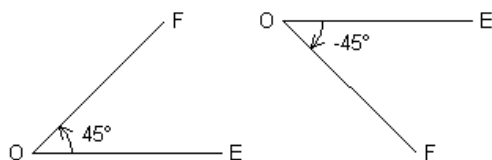
(2) 利用直角座標證明餘弦定理

(3) 提供例題說明，並利用數學軟體驗證。

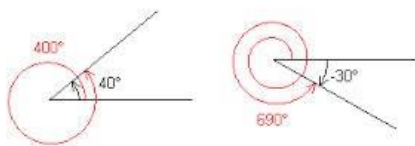
(4) 提供例題請學生練習，熟悉三角函數值表及餘弦定理。

4. 廣義三角函數：

(1) 有向角及廣義角：



逆時針為正角；順時針為逆角。



同界角： $\theta$ 、 $\phi$  為同界角，則

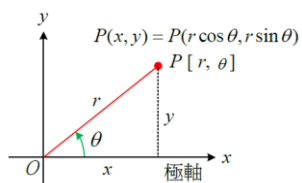
$$\theta - \phi = 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

(2) 廣義三角函數：

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

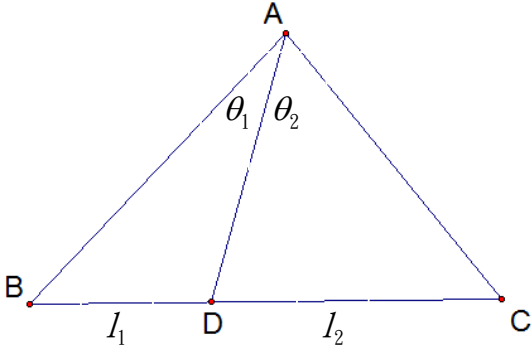
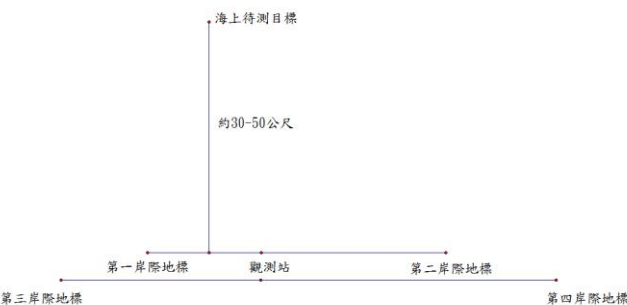


$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(3) 正弦函數的角度變換：

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

(4) 正弦定理與餘弦定理的應用

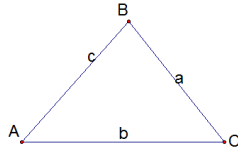
	 <p>例題：如上圖，設 A 點為海上待測目標，B、C 分別為第一第二岸際地標，D 為觀測站，<math>\theta_1 = 30^\circ</math>、<math>\theta_2 = 45^\circ</math>、<math>I_1 = 10</math> 公尺、<math>I_2 = 20</math> 公尺，則</p> <p>(1) <math>\angle ADC = ?</math></p> <p>(2) <math>\overline{AD} = ?</math></p> <p>解：如例題 1</p>			
對應教學目標	教學活動	時間	教學資源	教學評量
5-1-3 1-1-2 1-2-2 2-2-2 3-2-1 3-2-2 4-1-2 5-1-1 5-2-1 5-3-1 5-3-2 5-4-1	<p>1. 室外課程的場地規劃：</p>  <p>註：第一、第二岸際地標相距需小於 20 公尺；第三、第四岸際地標需大於 30 公尺</p> <p>2. 介紹測量工具</p> <p>(1) 簡易測量工具：手錶</p> <p>(2) 較精確測量工具：分度規</p> <p>3. 說明如何使用學習單</p> <p>1. 分組：每組 5-8 人，分為 6 組。 組內工作分配如下</p>	50分鐘	100m×50m 場地一式、 100m 皮尺、 桌子 手錶 分度規 學習單	口頭評量、上課態度、學習單評量

	<p>(1)組長：負責分配工作、收集測量數據及監督計算結果。</p> <p>(2)測量角度人員：至少 2 名。</p> <p>(3)測量距離人員：2 名。</p> <p>(4)其餘組員：支援及計算測量結果。</p> <p>※ 每組所需工具：</p> <p>(1)紙、筆及學習單</p> <p>(2)桌子x2</p> <p>(3)指針式手錶x2</p> <p>(4)分度規x2</p> <p>(5)測量皮尺(100m) x1</p> <p>(6)計算機x1</p> <p>(7)三角函數值表x1</p> <p>5. 各組自行決定待測點</p> <p>(1)各組達測量點後依學習單內容開始測量角度。</p> <p>(2)依測量角度及三角函數值表、正弦定理、餘弦定理計算觀測站與目標點距離及角度。</p> <p>6. 完成四次測量後將計算結果填寫於學習單。</p> <p>(1)教師利用電腦驗算結果。</p> <p>(2)誤差大於 10 公尺以上請同學重新測量。</p> <p>7. 四次測量結果皆小於 10 公尺之組別</p> <p>(1)請回測量點實際測量目標點與測量點之距離。</p> <p>(2)將所有數據填入學習單之「測量比較結果表」。</p> <p>(3)實施各組「問題與討論」。</p> <p>8. 集合</p> <p>(1)各組回報討論結果。</p> <p>(2)實施綜合討論及回饋。</p> <p>9. 回收學習單，課程結束。</p>		
--	---	--	--

## 貳、教學簡報檔

### 餘弦定理

三角形的邊角關係：  
如右圖，設  
∠A的對邊為a，  
∠B的對邊為b，  
∠C的對邊為c。



1

### 餘弦定理

則在△ABC中

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

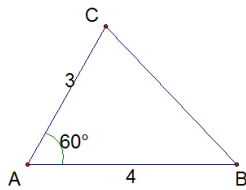
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2

### 餘弦定理-例題

△ABC中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ，則 $\overline{BC}=?$



3

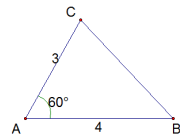
### 餘弦定理-例題

解：由餘弦定理

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{13}$$



4

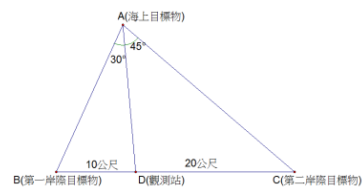
### 例題：岸際定位

例題：設海上待測目標物回報第一岸際目標物與觀測站的夾角為 $30^\circ$ 、第二岸際目標物與觀測站的夾角為 $45^\circ$ ，第一岸際目標物與觀測站的距離為10公尺、第二岸際目標物與觀測站的距離為20公尺，請問，如何判定待測目標物的位置？

5

### 例題：岸際定位

將題目條件轉化為圖形即為下列圖形



6

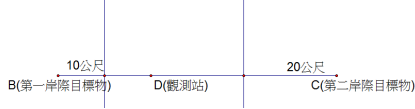


**例題：岸際定位-尋找目標位置**

Step1：在紙上依比例畫出B、D、C的位置



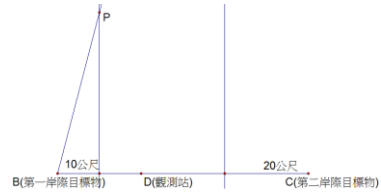
Step2：作BD及CD的中垂線



7

**例題：岸際定位-尋找目標位置**

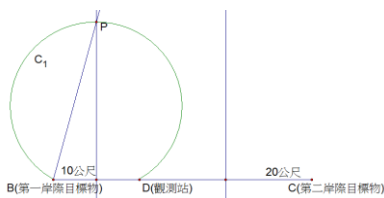
Step3：作射線BP，使 $\angle DBP=75^\circ$ 並交BD中垂線於P



8

**例題：岸際定位-尋找目標位置**

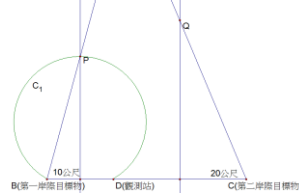
Step4：作 $\triangle BPD$ 的外接圓 $C_1$



9

**例題：岸際定位-尋找目標位置**

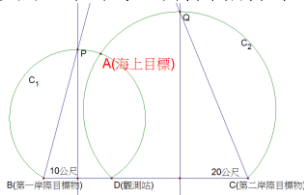
Step5：作射線CQ，使 $\angle DCQ=67.5^\circ$ 並交CD中垂線於Q



10

**例題：岸際定位-尋找目標位置**

Step6：作 $\triangle CQD$ 的外接圓 $C_2$ ， $C_1$ 及 $C_2$ 的交點A即為海上目標物所在位置



11

**例題：計算海上目標與觀測站距離**

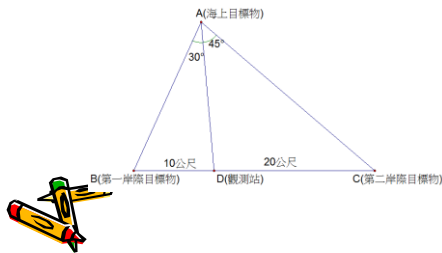
例題：設海上待測目標物回報第一岸際目標物與觀測站的夾角為 $30^\circ$ 、第二岸際目標物與觀測站的夾角為 $45^\circ$ ，第一岸際目標物與觀測站的距離為10公尺、第二岸際目標物與觀測站的距離為20公尺，請問，如何判定待測目標物的位置？



12

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

將題目條件轉化為圖形即為下列圖形

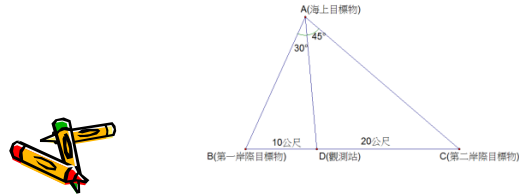


13

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

解：

$\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 為同高，所以  
 $\triangle ABD:\triangle ADC=10:20=1:2$

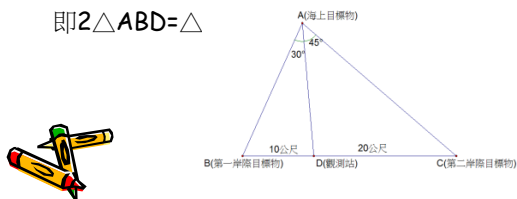


14

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

解：

$\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 為同高，所以  
 $\triangle ABD:\triangle ADC=10:20=1:2$   
即 $2\triangle ABD=\triangle ADC$

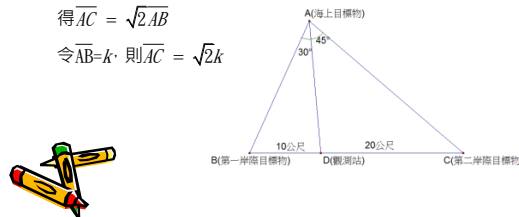


15

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

解：由 $\triangle ABD=\triangle ADC$

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin 45^\circ$   
得 $\overline{AC} = \sqrt{2}\overline{AB}$   
令 $\overline{AB}=k$ ，則 $\overline{AC} = \sqrt{2}k$

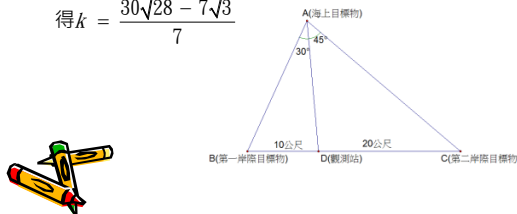


16

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

解：由餘弦定理

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(30^\circ + 45^\circ)$   
得 $k = \frac{30\sqrt{28-7\sqrt{3}}}{7}$

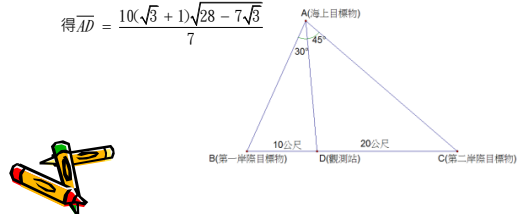


17

例題：計算海上目標  
與觀測站距離

解：由前述討論知 $3\triangle ABD=\triangle ABC$

所以 $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{3} (\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 75^\circ)$   
得 $\overline{AD} = \frac{10(\sqrt{3}+1)\sqrt{28-7\sqrt{3}}}{7}$



18

參、學生學習單

「海上定位」學習單

國 立 花 蓮 女 子 高 級 中 學  
海 洋 教 育 融 入 數 學  
學 習 單

指導老師：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_

地點：\_\_\_\_\_

班級：\_\_\_\_\_

組別：\_\_\_\_\_

組長：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_

第一次測距，使用工具：\_\_\_\_\_

(本次測距第一、第二岸際地標需小於 30 公尺)

第一角：\_\_\_\_\_、第二角：\_\_\_\_\_、

第一岸際地標與觀測站距\_\_\_\_\_、第二岸際地標與觀測站距

\_\_\_\_\_

計算結果：\_\_\_\_\_、驗算結果：\_\_\_\_\_

第二次測距，使用工具：\_\_\_\_\_

(本次測距第一、第二岸際地標需小於 30 公尺)

第一角：\_\_\_\_\_、第二角：\_\_\_\_\_、

第一岸際地標與觀測站距\_\_\_\_\_、第二岸際地標與觀測站距

\_\_\_\_\_

計算結果：\_\_\_\_\_、驗算結果：\_\_\_\_\_

第三次測距，使用工具：\_\_\_\_\_

(本次測距第一、第二岸際地標需小於 30 公尺)

第一角：\_\_\_\_\_、第二角：\_\_\_\_\_、

第一岸際地標與觀測站距\_\_\_\_\_、第二岸際地標與觀測站距

\_\_\_\_\_

計算結果：\_\_\_\_\_、驗算結果：\_\_\_\_\_

第四次測距，使用工具：\_\_\_\_\_

(本次測距第一、第二岸際地標需小於 30 公尺)

第一角：\_\_\_\_\_、第二角：\_\_\_\_\_、

第一岸際地標與觀測站距\_\_\_\_\_、第二岸際地標與觀測站距\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

計算結果：\_\_\_\_\_、驗算結果：\_\_\_\_\_

測量結果比較表

測距次數	使用工具	岸際地標物距離	計算結果	實際距離	誤差
第一次測距					
第二次測距					
第三次測距					
第四次測距					

## 問題與討論

1、請比較第一、二次測距及第三、四次測距。

(1)請問兩岸際地標物距離是否會影響測距誤差？

(2)承上題，如果有影響，請由測距結果說明兩岸際地標物距離及測距誤差之間的關係。

答：

---

---

---

2、請比較一、三次測距及第二、四次測距。

(1)請問哪一種測距工具較為精準？

(2)承上題，你們是否可接受使用手錶作為測量角度的測距工具？

答：

---

---

---



## 肆、學習評量

### 一、學生學習自評表

經過二節課的學習後，請同學一面回想上課內容，並自我評量自己是否具備下列能力。請在每項能力後圈選符合的學習程度。

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

授課教師：\_\_\_\_\_

自評項目	很滿意	滿意	普通	不滿意	待改進
我能透過三角函數值表查閱正弦函數值					
我能使用三角函數值表及內插法計算正弦函數值					
我能透過三角函數值表查閱餘弦函數值					
我能使用三角函數值表及內插法計算餘弦函數值					
我能背誦餘弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$					
我能利用餘弦定理計算三角形邊長					
我會利用手錶求出觀測點與目標物之夾角					
我會利用分度規求出觀測點與目標物之夾角					
我會使用圓規及已知角度畫出目標物所在位置					
我會利用手錶及皮尺之測量資料及正、餘弦定理計算出目標物與觀測點的距離					
我會利用分度規求出觀測點與目標物之夾角					
我會利用分度規及皮尺之測量資料及正弦定理計算出目標物與觀測點的距離					
我能比較兩觀測點距離大小與誤差的關係					

我能比較利用手錶及分度規觀測結果與誤差之間的關係					
--------------------------	--	--	--	--	--

## 二、教師檢核能力指標達成狀況表

自評項目	很滿意	滿意	普通	不滿意	待改進
學生能透過三角函數值表查閱正弦函數值					
學生能使用三角函數值表及內插法計算正弦函數值					
學生能透過三角函數值表查閱餘弦函數值					
學生能使用三角函數值表及內插法計算餘弦函數值					
學生能背誦餘弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$					
學生能利用餘弦定理計算三角形邊長					
學生會利用手錶求出觀測點與目標物之夾角					
學生會利用分度規求出觀測點與目標物之夾角					
學生會使用圓規及已知角度畫出目標物所在位置					
學生會利用手錶及皮尺之測量資料及正、餘弦定理計算出目標物與觀測點的距離					
學生會利用分度規求出觀測點與目標物之夾角					
學生會利用分度規及皮尺之測量資料及正弦定理計算出目標物與觀測點的距離					
學生能比較兩觀測點距離大小與誤差的關係					
學生能比較利用手錶及分度規觀測結果與誤差之間的關係					

### 三、教學省思

高中學生在數學課程中，依課綱分門別類學習代數、函數、數列、離散、幾何、、、等各大數學領域的基礎知識；在實際授課中，常常會有學生問：「老師，這個知識或理論如何應用在生活中？」單純知識的累積難以引發學習動機，在缺乏學習動機的情況下，如何鼓勵學生在將來大學的學習中投入研究數學呢？

所以，本教案在最初設計時，希望同學可以實際操作「數學定理」，不是在乾淨、明亮與充斥著電子設備的電腦教室，而是在實際的野外環境，使用一些簡單的器材，應證所學知識；在本年度承蒙周梅英老師及潘明輝老師的介紹，國家教育研究院葉家棟博士的邀請，參與撰寫有關海洋教育融入數學的教案，在前幾次討論會時，思緒紛飛，腦中想著如何將數學課程內容與海洋教育結合，在蒐集資料的過程中，也發現本人對海洋知識的貧乏，最後決定在計算簡單，具體可操作的高中數學課程，找來找去，也只有「三角函數」符合教案需求！

由於三角函數主要在談論幾何圖形的相關性質，尤其對三角形的討論更加完整，內容包括基礎三角函數、三角函數值表、正弦定理、餘弦定理、廣義三角函數、、、等；而教案內容使用的定理主要是使用正弦定理及餘弦定理；這兩個定理是在高二上學期(每年的9月、10月)講授，講授完後恰好我可以實際依教案教學，真是幸運！既不會耽誤教學進度，又可以加深學生對定理的學習深度，更重要的是數學課終於有室外課，從學生的角度來看，絕對是史無前例；所以，各位應該可以想像學生何等心歡雀躍！在上課心態上何等積極參與！

在編寫教案完成後，首先進行室內課程，複習舊進度-正弦定理及餘弦定理；由於在數天前的段考才結束，所以學生對正弦定理及餘弦定理非常熟悉，因此，在複習課程，甚至在計算例題時，學生的學習狀況良好；隨後，我開始介紹精確測量工具-分度規及簡易的測量工具-指針式手錶，學生對於使用這項工具的動作與姿勢連結到某部受歡迎的偵探動畫，增添不少上課樂趣；接著，我將學生分組，將教室桌椅排開，在講台上設立三個觀測目標，實際請同學操作測量，並請未操作的同學依觀測資料進行計算，最後實際測量距離；本次實際操作因學生隨意站位，所以測量所得角度非特定的角度(例如 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$ )，因此計算上非常複雜；當教師檢視答案，詢問最接近答案的組別如何計算時，學生解答：「用猜的！」

因為該組學生知道本校教室長寬的約略長度，所以以目測判斷大約距離，猜到一個令人哭笑不得的答案！不過也看得出學生善用其他資訊尋求解答的解題過程，不得不佩服學生在升學壓力下所激發出來的潛力；因此，教師只好重新設定教室三目標物之間的距離(目標B-D-C之間的距離為：B-D之間2公尺，D-C之間4公尺)，尋找定點A使得 $\angle BAD=30^\circ$ 、 $\angle CAD=45^\circ$ ，上述數據完全符合

例題所提供的邊長比例；在請同學測量，得  $\overline{AD} = 302$  公分，與例題紙筆計算的結果 311 公分接近，驗證理論與實際狀況吻合，測距方法確實可行！

最後，為了解測距方法是否吻合實際情形，所以教師決定於花蓮有名的風景區-鯉魚潭，實施水面上測距教學；因受限於經費、器材與考量學生安全，最後決定只帶五位學生，利用周休假日實施教學。

學生兩人一組，在岸邊先穿著救生衣，攜帶通話器、時鐘、分度規、紙、筆，然後採船至指定岸際取塑膠皮尺，以倒退方式使船隻到達指定地點；岸際同學快速紀錄皮尺呈現數據後收回皮尺(因考量船體安全，故不宜將皮尺長時間置於船上，避免皮尺捲入船體下方螺旋槳，使船隻失去動力)，接著船上同學測量岸際三目標物夾角並回報，岸際同學收到資料後立即畫圖確定船隻位置及計算船隻與觀測站的距離，並檢核一開始船隻拉開皮尺的數據。

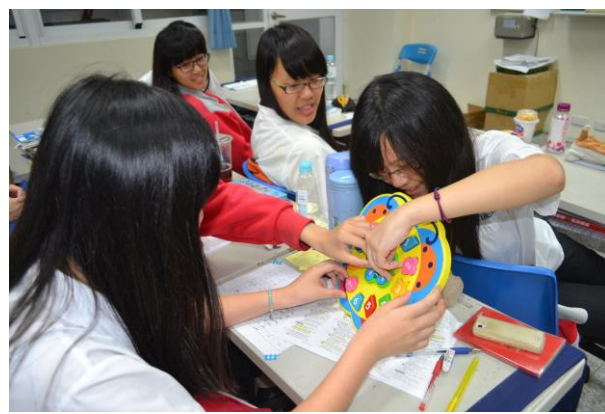
在前幾次的測量當中，由於鯉魚潭是花蓮有名的風景區，適逢周休二日及中國大陸十一長假，鯉魚潭周邊遊客眾多，且湖面上有許多快艇穿梭，以致於湖面上有許多上下震動的波浪使得在測距時的長度、角度都受到很大的影響；其次，因本次教學所租用的船隻是屬於輕型腳踏船，易受水流及風向影響而改變位置；所以，在前期的測距工作中，誤差非常的大，甚至由岸際測量湖面上船隻的角度隨時都在變化；因此，在無法克服這些變因的情況下，本次教學將會以失敗告終！

但是，當教學團隊準備放棄時，突然發現湖面船隻減少，鯉魚潭周圍環境開始進入無風狀態，推測可能是遊客去吃午餐及鯉魚潭周遭環境影響(因鯉魚潭四面環山，接近中午時天氣會相當悶熱且無風)，所以立刻再實施測距教學，接下來的測距工作相當順利，不只取得測量資料容易，更重要的是計算結果與施測結果誤差縮小，學生也深刻體會，如果沒有有效的測量方式，要在岸際發現海上較小目標是一件多麼困難的事！

教師在教學過程中，明顯發現學生對於本篇教案所提供的例題感到相當大的困擾，深究其因，在例題中的數學理論都不困難，但是因為學生的計算能力不足，以致於學生對計算結果興趣缺缺，可見如何研發具體可行、計算簡單的測量方式才易受到學生的歡迎；其次，在湖面上測距時，學生反應許多誤差是來自測量用的皮尺，因為在拉動皮尺時，不能保持緊繃狀態(因為皮尺若處於緊繃狀態會使得船體產生位移)，所以不能精確測定距離，建議如果有經費，在下次上課時使用較為精準的「雷射測距儀」，會使得測距更為精準，誤差減少！

## 伍、教學活動照片

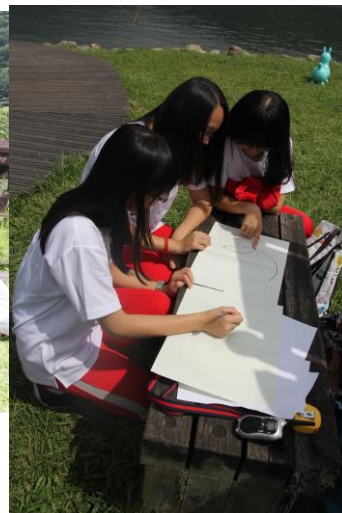
### 一、授課記錄-室內課程







## 二、授課記錄-室外課





## 陸、教學補充資料

### 一、補充資料

此教案設計主要運用正弦定理，求得三角形三邊長，其推導過程的實例說明如下：

#### [例題 1]

設海上待測目標物回報第一岸際目標物與觀測站的夾角為  $30^\circ$ 、第二岸際目標物與觀測站的夾角為  $45^\circ$ ，第一岸際目標物與觀測站的距離為 10 公尺、第二岸際目標物與觀測站的距離為 20 公尺，請問，如何判定待測目標物的位置？

解答

如右圖，設

B：第一岸際目標物

D：觀測站

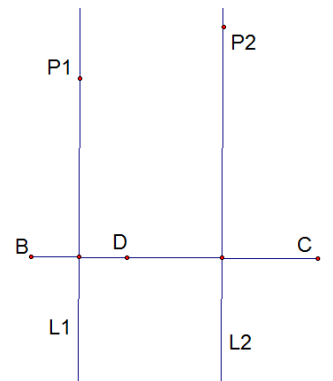
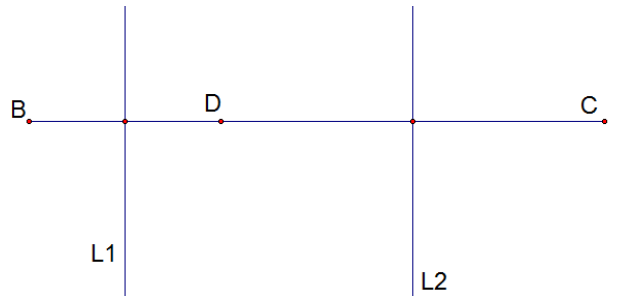
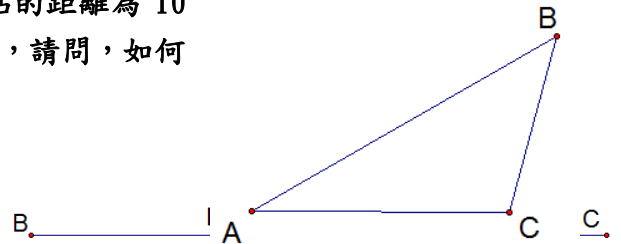
C：第二岸際目標物， $\overline{BD} = 10$ 、 $\overline{DC} = 20$

(1) 分別作  $\overline{BD}$ 、 $\overline{DC}$  的中垂線  $L_1$ 、 $L_2$

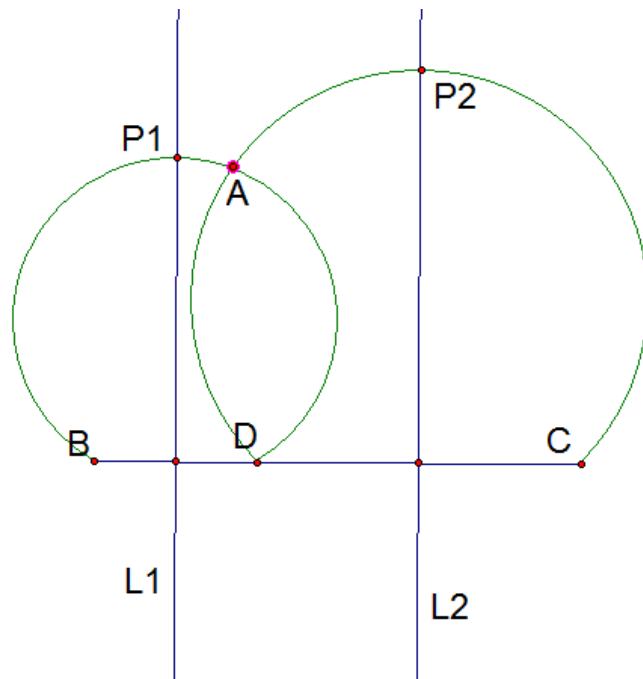
(2) 使用量角器分別在  $L_1$ 、 $L_2$  上找一點  $P_1$ 、 $P_2$  使得

$$\angle P_1BD = 75^\circ \text{ 及 } \angle P_2CD = 67.5^\circ$$

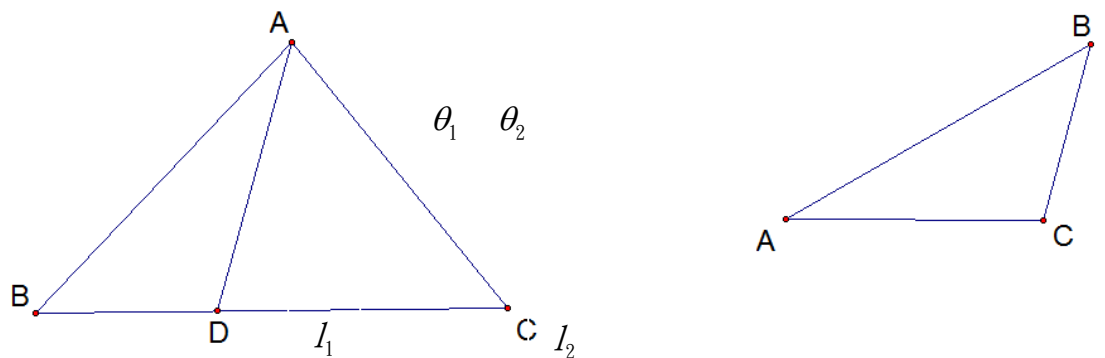
(3) 分別作  $\triangle P_1BD$  及  $\triangle P_2CD$  的外接圓，兩圓的交點即為海上待測目標物 A 所在位置。(如下圖)







[例題 2]



如上圖，設 A 點為海上待測目標，B、C 分別為第一第二岸際地標，D 為觀測站，

$\theta_1 = 30^\circ$ 、 $\theta_2 = 45^\circ$ 、 $I_1 = 10$  公尺、 $I_2 = 20$  公尺，則

(1)  $\angle ADC = ?$

(2)  $\overline{AD} = ?$

解答

$\triangle ABD$  與  $\triangle ADC$  為同高，所以  $\triangle ABD : \triangle ADC = I_1 : I_2 = 10 : 20 = 1 : 2$

$\triangle ABD$  面積為  $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \theta_1$ ， $\triangle ADC$  面積為  $\frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \theta_2$  帶入上式，得

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \overline{AB}，令 \overline{AB} = k，則 \overline{AC} = \sqrt{2}k，$$

由餘弦定理  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)$ ，即

$$30^2 = k^2 + (\sqrt{2}k)^2 - 2k \cdot \sqrt{2}k \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}，得 k = \frac{30\sqrt{28 - 7\sqrt{3}}}{7}$$

由前述討論知  $\triangle ABD = \frac{1}{3} \triangle ABC$ ，所以

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \theta_1 = \frac{1}{3} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \sin \theta_2 \quad (\text{得})$$

$$\overline{AD} = \frac{10(\sqrt{3} + 1)\sqrt{28 - 7\sqrt{3}}}{7}$$

## 二、參考資料

普通高級中學 99 課程綱要。

<https://www.sanmin.com.tw/learning/public/data/course/>

高中數學（龍騰版）第三冊。1-3 正弦定理、餘弦定理及 1-5 三角測量。